А. В. Шабанская

Университет Толидо (США, Огайо)

anastasia.shabanskaya@rockets.utoledo.edu

КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ОДНИМ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫМ БАЗИСНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ НАД ПОЛЕМ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Введение. В своей диссертации, пример из которой я хочу привести в этой работе, я вместе с моим научным руководителем Джерардом Томпсоном исследую алгебры Ли размерности шесть, которые разрешимы, неразложимы и обладают пятимерным ниль-радикалом. Эта тема возникла из одноименной статьи Г. М. Мубаракзянова, напечатанной в 1963 году. На эту статью часто ссылаются в литературе, но в ней содержится много ошибок, потому что все подсчитывалось вручную, и поэтому лист алгебр, который он получил, не полон. Также статья не раскрывает детали, как они были найдены. Некоторые алгебры полностью отсутствуют, как, например, в шестом параграфе, где автор не включил целый класс комплексных алгебр Ли. Для того чтобы улучшить работу Мубаракзянова, я интенсивно использую программы, написанные в пакете Maple. В каждом параграфе мною с помощью этого пакета выведена матрица смены базиса (за исключением случаев, где массивность вычислений даже для компьютера требует представить больше, чем одну матрицу), которая выдает окончательную алгебру Ли и снимает необходимость проводить вычисления вручную.

Синопсис статьи Г. М. Мубаракзянова. В этой статье девять параграфов, основанных на структуре ниль-радикала, который размерности пять и необязательно разложимую нильпотентную алгебру Ли. Он изоморфен следующим алгебрам Ли, выбранным в моей диссертации в виде, полученном при перестановке базисных векторов так, чтобы сопряженное представление выглядело как можно более близким к верхнетреугольному:

i. $\mathbb{R}^5$;

ii. $H \bigoplus \mathbb{R}^2 : [e_4, e_5] = e_1$;

iii. $A_{4,1} \bigoplus \mathbb{R} : [e_2, e_5] = e_1, \ [e_4, e_5] = e_2$;

iv. $A_{5,1} : [e_3, e_5] = e_1, \ [e_4, e_5] = e_2$;

v. $A_{5,2} : [e_2, e_5] = e_1, \ [e_3, e_5] = e_2, \ [e_4, e_5] = e_3$;

vi. $A_{5,3} : [e_2, e_4] = e_3, \ [e_2, e_5] = e_1, \ [e_4, e_5] = e_2$;

vii. $A_{5,4} : [e_2, e_4] = e_1, \ [e_3, e_5] = e_1$;

viii. $A_{5,5} : [e_3, e_4] = e_1, \ [e_2, e_5] = e_1, \ [e_4, e_5] = e_2$;

ix. $A_{5,6} : [e_3, e_4] = e_1, \ [e_2, e_5] = e_1, \ [e_3, e_5] = e_2, \ [e_4, e_5] = e_3$.

Один из примеров алгебры Ли, не полученной Г. М. Мубаракзяновым. В шестом параграфе цитируемой работы ниль-радикал представлен в следующем виде: $[e_1, e_4] = e_3, \ [e_1, e_5] = e_2, \ [e_4, e_5] = e_1$. Тогда $[e_1, e_4] = e_3, \ [e_1, e_5] = e_2, \ [e_4, e_5] = e_1, \ [e_i, e_6] = a_i^k e_k$, где $a_i^k \in \mathbb{R}$ и $i, k = \overline{1,5}$. Удовлетворяя тождеству Якоби, осуществляя преобразования “абсорбции”, т. е. уничтожения коэффициентов a_1^2, a_1^3, a_5^2, и переобозначая $a_4^3 - a_5^2$ через a_4^3, $a_4^4 = a$ и $a_5^5 = b$, получаем, что эта алгебра выглядит следующим образом:

$[e_1, e_4] = e_3$, $[e_1, e_5] = e_2$, $[e_4, e_5] = e_1$, $[e_1, e_6] = (a+b)e_1$, $[e_2, e_6] = (a+2b)e_2 + a_2^3 e_3$, $[e_3, e_6] = a_3^2 e_2 + (2a+b)e_3$, $[e_4, e_6] = a_4^2 e_2 + a_4^3 e_3 + a e_4 + a_3^2 e_5$, $[e_5, e_6] = a_5^3 e_3 + a_2^3 e_4 + b e_5$, где через $A = \begin{bmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2b & a_3^2 & a_4^2 & 0 \\ 0 & a_2^3 & 2a+b & a_4^3 & a_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & a & a_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^2 & b \end{bmatrix}$ обозначена 5×5-подматрица сопряженного преобразования вектора e_6, взятого с отрицательным знаком. Применяя к алгебре Ли преобразование, фиксирующее все вектора, кроме $e_2' = e_2 + xe_3$ и $e_5' = e_5 + ye_4$, мы получим, что два ее коэффициента можно сделать равными нулю, решив уравнение

$$(a-b)x - a_3^2 x^2 + a_2^3 = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда дискриминант этого уравнения отрицательный и обозначим два его комплексных решения через $c + id$, где c и d — любые действительные числа. Тогда наша алгебра Ли примет вид

$[e_1, e_4] = e_3$, $[e_1, e_5] = e_2$, $[e_4, e_5] = e_1$, $[e_1, e_6] = (a + b)e_1$, $[e_2, e_6] = (a + 2b + a_3^2(c+id))e_2$, $[e_3, e_6] = a_3^2 e_2 + (2a + b - a_3^2(c+id))e_3$, $[e_4, e_6] = a_4^2 e_2 + (a_4^3 - a_4^2(c+id))e_3 + (a - a_3^2(c+id)\,e_4 + a_3^2 e_5$, $[e_5, e_6] = (a_4^2(c+id))e_2 + (a_5^3 + a_4^3(c+id) - (c+id)^2 a_4^2)e_3 + (a_3^2(c+id) + b)e_5$.

Переобозначая $a_3^2 d$, $a - a_3^2 c$ и $b + a_3^2 c$ через d, a и b соответственно, затем $a_4^2 c$, $a_4^2 d$, $a_4^3 - a_4^2 c$, $a_4^3 c - (c^2 + d^2)a_4^2 + a_5^3$ и $a_4^3 d - 2cda_4^2$ через c_1, d_1, c_2, a_5^3 и a_4^3, мы получим, что

$[e_1, e_4] = e_3$, $[e_1, e_5] = e_2$, $[e_4, e_5] = e_1$, $[e_1, e_6] = (a + b)e_1$, $[e_2, e_6] = (a+2b+id)e_2$, $[e_3, e_6] = a_3^2 e_2 + (2a+b-id)e_3$, $[e_4, e_6] = a_4^2 e_2 + (c_2 - id_1)e_3 + (a - id)e_4 + a_3^2 e_5$, $[e_5, e_6] = (c_1 + id_1)e_2 + (a_5^3 + ia_4^3)e_3 + (b + id)e_5$.

С помощью преобразования, фиксирующего все базисные вектора, кроме $e_3' = e_3 + \frac{a_3^2}{a-b-2id}e_2$ и $e_4' = e_4 + \frac{a_3^2}{a-b-2id}e_5$, мы получим, что

$$A_1 =$$
$$\begin{bmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2b+id & 0 & A_4^2 & C_5^2 \\ 0 & 0 & 2a+b-id & \frac{c_2b-c_2a+2ic_2d-id_1b+id_1a+2d_1d-a_3^2a_5^3-ia_3^2a_4^3}{b-a+2id} & a_5^3+ia_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & a-id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+id \end{bmatrix},$$

где $A_4^2 = \frac{B_4^2}{(b-a+2id)^2}$, а $B_4^2 = a_4^2b^2 - 2a_4^2ab + 2ia_3^2ad_1 + a_4^2a^2 - 4ia_4^2ad - 4a_4^2d^2 + a_3^2c_2b - a_3^2c_2a - i\left(a_3^2\right)^2 a_4^3 - 2ia_3^2d_1b - 2ia_3^2c_1d + 4a_3^2d_1d - a_3^2c_1b + a_3^2c_1a + 4ia_4^2bd - \left(a_3^2\right)^2 a_5^3 + 2ia_3^2c_2d$ и $C_5^2 = \frac{c_1b-c_1a+2ic_1d+id_1b-id_1a-2d_1d+a_3^2a_5^3+ia_3^2a_4^3}{b-a+2id}$.

В целях компактности записи переобозначим A_4^2 через $c_3 + id_3$, $\frac{c_1b-c_1a+2ic_1d+id_1b-id_1a-2d_1d+a_3^2a_5^3+ia_3^2a_4^3}{b-a+2id}$ через $c_4 + id_4$ и $\frac{c_2b-c_2a+2ic_2d-id_1b+id_1a+2d_1d-a_3^2a_5^3-ia_3^2a_4^3}{b-a+2id}$ через $c_5 + id_5$. Тогда

$[e_1,e_4] = e_3$, $[e_1,e_5] = e_2$, $[e_4,e_5] = e_1$, $[e_1,e_6] = (a+b)e_1$, $[e_2,e_6] = (a+2b+id)e_2$, $[e_3,e_6] = (2a+b-id)e_3$, $[e_4,e_6] = (c_3 + id_3)e_2 + (c_5+id_5)e_3$, $[e_5,e_6] = (c_4+id_4)e_2 + (a_5^3+ia_4^3)e_3 + (b + id)e_5$.

Пример: если $a \neq -b$, то матрица смены базиса

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4+id_4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-c_3-id_3}{2(b+id)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c_4+id_4-c_5-id_5}{a+b} & \frac{a_5^3+ia_4^3}{2id-2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и $[e_1,e_4] = e_3$, $[e_1,e_5] = e_2$, $[e_4,e_5] = e_1$, $[e_1,e_6] = (a+b)e_1$, $[e_2,e_6] = (a+2b+id)e_2$, $[e_3,e_6] = (2a+b-id)e_3$, $[e_4,e_6] = (a - id)e_4$, $[e_5,e_6] = (b+id)e_5$ — шестиразмерная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мубаракзянов Г.М. *Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом* // Изв. вузов. Мат. – 1963. – № 4. – С. 104-116.

2. Turkowski P. *Solvable Lie Algebras of dimension six* // J. Math. Phys. –1990. – V. 31. – No 6. – P. 1344-1350.

3. Jacobson N. *Lie Algebras.* – Interscience Publishers, 1962.

4. Хамфрис Дж. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* – N. J.: Springer-Verlag, 1972.

Н. В. Шалагинова

Вятский государственный гуманитарный университет,
korshunnv@mail.ru

ТРИ ПУЧКА ДЛЯ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Классическим объектом в математике является кольцо $C(X)$ всех непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве X, со значениями в поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Его свойства достаточно хорошо изучены (см., например, [6], [7]). С кольцом $C(X)$ тесно связан другой объект — полукольцо $C^{+}(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций, который активно изучается последние 15 лет [2].

Метод пучковых (функциональных) представлений находит применение в различных алгебрах, среди которых выделяются кольца [3] и полукольца [4]. Ниже представлено распространение материала (из [7] о кольцах $C(X)$) на случай полуколец непрерывных функций. Определяются три пучка